1 习题解答

1 求半圆律 $\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2},\quad x\in[-2,2]$ 的 k 阶矩并验证其决定 $\rho(x)$。

Proof. (From 宋京倍的作业)

$k=2m+1$ 时, $E\left[x^k\right]=\int_{-2}^{2}x^k\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}dx=0.$

当 $k=2m$ 时,

$$\begin{aligned}
E\left[x^{2m}\right]&=\frac{1}{\pi}\int_0^2 x^{2m}\sqrt{4\pi^2}dx\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2^{2m}\cdot\sin^{2m}x\cdot 2\cos x\cdot 2\cos x dx\\
&=\frac{1}{\pi}\cdot 4^{m+1}\int_0^{\frac{2}{2}}\sin^{2m}x\cos^2 x dx\\
&=\frac{1}{\pi}4^{m+1}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{2m+1}{2},\frac{3}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}4^{m+1}\frac{\Gamma\left(\frac{2m+m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(m+2)}\\
&=\frac{1}{2\pi}4^{m+!}\cdot\frac{1}{2^m}(2m-1)!!\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{(m+1)!}\\
&=\frac{1}{m+1}C_{2m}^{m}.
\end{aligned}\tag{1}$$

从而

$$E\left[X^k\right]=\begin{cases}0,\ k=2m+1\\ \frac{1}{m+1}C_{2m}^{m},\ k=2m.\end{cases}\tag{2}$$

Riesz 条件:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{k}\left(\gamma_{2k}\right)^{\frac{1}{2k}}\right)&=\ln\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}C_{2k}^{k}\right)^{\frac{1}{2k}}\right)\\
&=-\ln k-\frac{1}{2k}\ln(k+1)+\frac{1}{2k}\ln\frac{(2k)!}{k!k!},
\end{aligned}\tag{3}$$

由

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{(2k)!}{k!k!}\right)}{2k}&=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln((2k+2)!)-\ln(2k)!+2\ln k!-2\ln(k+1)!}{2k+2-2k}\quad(\text{Stolz 定理})\\
&=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(2k+2)+\ln(2k+1)-2\ln(k+1)}{2}=\ln 2,
\end{aligned}\tag{4}$$

从而

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\left(\gamma_{2k}^{\frac{1}{2K}}\right)\right)=0<\infty.\tag{5}$$

满足 Risez 条件，从而矩序列决定了分布 $\rho(x)$. □

2 序列 $\gamma_{2k+1}=0, \gamma_{2k}=1$ 是否对应随机变量矩序列?

Proof. 显然 $\{\gamma_k\}$ 满足 Risez 条件，我们尝试通过矩来计算特征函数。假设其为随机变量 X 的矩，则:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{itX}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(\frac{(it)^n X^n}{n!}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n\gamma_n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^2 n}{(2n)!} \\ &= \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}.\end{aligned} \tag{6}$$

为两点分布 $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2}$ 的特征函数。易验证 X 的矩满足题目条件。 □

3 设 X_k 为独立同分布随机变量列，$E[X_1]=0, Var(X_1)=1, E[|X_1|^3]<\infty$，试用 Linderberg 替换法证明

$$|P(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k \le t)-\Phi(t)| = \mathrm{O}(n^{-\frac{1}{8}}), \quad \forall t\in\mathbb{R} \tag{7}$$

Proof. (From 宋京倍的作业)

我们先证明 lindeberg 替换定理:

定理 1.1 (Lindeberg 替换)**.**

Lindeberg 替换定理证明. 令 $Y_1, Y_2..., Y_n$ 为服从正态分布 $N(0,1)$ 的独立同随机变量，设 X_k 为方差为 1 的独立同随机变量，记 $Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k$. 令

$$Z_{n,i}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(X_1+\cdots+X_i+Y_{i+1}+\cdots+Y_n\right). \tag{8}$$

则

$$E\varphi\left(Z_n\right)-\varphi(Y)=-\sum_{i=0}^{n-1}E\left(\varphi\left(Z_{n,i}\right)-\varphi\left(Z_{n,i+1}\right)\right), \tag{9}$$

其中

$$Z_{n,i}=S_{n,i}+\frac{Y_{i+1}}{\sqrt{n}},\ Z_{n,i+1}=S_{n,i}+\frac{X_{i+1}}{\sqrt{n}}, \tag{10}$$

$$S_{n,i}=\frac{X_1+\cdots+X_i+Y_{i+1}+Y_n}{\sqrt{n}}. \tag{11}$$

对 φ 做泰勒展开,

$$\varphi\left(Z_{n,i}\right)=\varphi\left(S_{n,i}\right)+\varphi'\left(S_{n,i}\right)\frac{Y_{i+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\varphi''\left(S_{n,i}\right)\frac{Y_{i+1}^2}{n}+\frac{Y_{i+1}^3}{6n^{\frac{3}{2}}}\varphi'''(\xi). \tag{12}$$

同样对 $\varphi(Z_{n,i+1})$ 有泰勒展开：

$$\varphi\left(Z_{n,i}\right)=\varphi\left(S_{n,i}\right)+\varphi^{\prime}\left(S_{n,i}\right) \frac{X_{i+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2} \varphi^{\prime \prime}\left(S_{n,i}\right) \frac{X_{i+1}^{2}}{n}+\frac{X_{i+1}^{3}}{6 n^{\frac{3}{2}}} \varphi^{\prime \prime \prime}(\xi). \tag{13}$$

取期望，由于 X 和 Y 的前二阶矩一致，$\varphi, \varphi', \varphi''$ 有一致上界

$$E\left[\varphi\left(Z_{n,i}\right)-\varphi\left(Z_{n,i+1}\right)\right]=O\left(\frac{E\left[|X|^{3}\right]+E\left[|Y|^{3}\right]}{n^{\frac{3}{2}}} \sup_{x \in R}\left|\varphi^{\prime \prime \prime}(x)\right|\right). \tag{14}$$

求和得到

$$\sum_{i=0}^{n-1} E\left[\varphi\left(z_{n,1}\right)-\varphi\left(z_{n,i+1}\right)\right]=O\left(n^{-\frac{1}{2}} E\left[|X|^{3}\right] \sup_{x \in R}\left|\varphi^{\prime \prime}\right|(x) \mid\right). \tag{15}$$

□

取 bump 函数

$$\varphi(t)=\left\{\begin{array}{l}1, t \in(-\infty, 0] \\ 0, t \in[1,+\infty)\end{array}\right. \tag{16}$$

则 $\varphi_{\epsilon 1}=\varphi(\frac{t-x+\epsilon}{\epsilon})$,$\varphi_{\epsilon 2}=\varphi(\frac{t-x-\epsilon}{\epsilon})$ 满足：

$$\varphi_{\epsilon 1} \leq 1_{t \leq x} \leq \varphi_{\epsilon 2}, \quad |\varphi_{\epsilon i}^{\prime\prime\prime}|=O(\epsilon^{-3}) \tag{17}$$

从而对 $\varphi_{\epsilon i}$ 用 Lindeberg 替换

$$E\left[\varphi_{\epsilon i}\left(Z_{n}\right)\right]=E[\varphi_{\epsilon i}(Y)]+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(E\left(\left|X^{3}\right|\right) \varepsilon^{-3}\right)\right. \tag{18}$$

$$\mathbb{P}\left(Z_{n} \leqslant x\right) \leqslant E\left[\varphi_{\epsilon 2}\left(Z_{n}\right)\right] \leq \Phi(x+\epsilon)+O(\epsilon^{-3} n^{-1/2}). \tag{19}$$

$$\mathbb{P}\left(Z_{n} \leqslant x\right) \geq E\left[\varphi_{\epsilon 1}\left(Z_{n}\right)\right] \geq \Phi(x-\epsilon)+O(\epsilon^{-3} n^{-1/2}). \tag{20}$$

从而

$$\mathbb{P}\left(Z_{n} \leqslant x\right)=\Phi(x)+O(\epsilon+\epsilon^{-3} n^{-1/2}) \tag{21}$$

取 $\epsilon=n^{-1/8}$ 即证。 □

2 矩方法与随机矩阵谱分布

如任意二阶矩存在的 i.i.d. 随机变量求和会收敛到正态分布这个高斯普适类，人们发现很多概率对象会收敛到不同的普适类（Universalilty class）中，对他们的研究占据了概率论的重要一环。比较著名的普适类有如下几种：

- 独立增量、中心极限定理 ⇒Guassian class
- 区域马氏性 + 共性不变（统计物理对象）⇒ SLE(Schramm–Loewner evolution)/CLE class

- KPZ 普适类（随机环境的最后渗流、弱相互作用 SPDE 的解等等）
- 随机矩阵谱分布/特征值（相互作用多体系统、无序系统等等）
- 等等等等...

我们这里关注的是随机矩阵的普适性（整体谱、边界局部谱、内部局部谱）。对于一些特定类型的随机矩阵（如每个变元都是高斯的），我们有很多分析的工具，比如高斯情形时我们甚至可以通过对矩阵的正交变换和换元将 N 阶矩阵的联合分布密度写出，运用分析的工具去研究他们的渐近行为（比如边界情形是 Airy 点过程和 Tracy-Widom 分布，内部是 Sine kernel 所决定的过程等等）。而对于一般的随机矩阵，我们一般使用的方法为矩方法，lindeberg 替换等等，我们这里主要关心的就是矩方法；

矩方法的想法主要来自 $tr(X^k) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k$. 通过对 $tr(X^k)$ 行为的研究我们可以反过来得到 λ 的性质，而 $tr(X^k)$ 的行为又可以归结到对图上路径的计数，这种方式就搭起了研究随机矩阵谱行为这一分析问题–图上特定路径的组合计数这一组合问题的桥梁。

以课上提到的 Wigner 矩阵为例，我们考虑 $\mathbb{E}tr(X^k)$ 和 $Var(tr(X^k))$ 对应的组合计数可以得到 $tr(X^k)$ 会 a.s. 收敛到作业题中的 γ_k，再用各种保证矩唯一的定理说明只要这个随机矩阵的阶一直大下去，他的整体的特征值分布会弱收敛到 Wigner 半圆律所对应的分布，并不要求矩阵内每个随机变量有什么特别的性质。（这种也是概率论中常用的证明方法 i.e. 一类概率对象满足某一性质 + 紧性和极限的唯一性能说明极限存在且唯一）

证明 Wigner 半圆律只是矩方法在随机矩阵中最简单的运用，其中我们只用考虑随机矩阵固定的矩，如果我们关注随机矩阵一些更精细的性质，比如最大的特征值到底多大（a.s. 会趋向于 2），或者他们特征值远离 Wigner 半圆律的波动等等，我们会考虑 k 随着 N 一起增长时的组合计数等等，比如说当我们 k 达到 $\log N$ 量级的时候我们能确定随机矩阵算子范数（最大特征值）的大小，而进一步令 k 到达 $N^{2/3}$ 这个量级我们可以得到最大特征值的波动等等，这样说明的特征值的性质都是普适的。

这种普适不仅仅是对 Wigner 矩阵，我们相信对于具体问题的一些变种随机矩阵（比如带状随机矩阵、多个随机矩阵乘积、随机图对应的随机矩阵等），对应的谱的普适性依然是存在的，但这种普适性存在的背后原因为何，还是一个略带神秘的问题。

3 Wishart 矩阵

Wishart 矩阵实际上也是样本协方差矩阵，具体来说他如下定义：

定义 3.1. *定义 X_n 为 $n \times p(n)$ 阶矩阵，满足 X_{ij} 为 $i.i.d.$ 随机变量，$E(X_{ij}) = 0$，$E(X_{ij}^2) = 1$，$E(|X_{ij}|^k) < \infty$ 对 $k \geq 3$. 定义*

$$S_n = \frac{1}{n} X X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{22}$$

令

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

为 S_n 的特征值，我们定义他的谱测度为

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{\lambda_i}. \tag{23}$$

则我们有它的经验谱测度收敛到 Marchenko-Pastur law.

定理 3.1. S_n, μ_n 如上定义，设 $p/n \overset{n\to\infty}{\to} \alpha \geq 1$. 则我们有

$$\mu_n(\cdot, \omega) \Rightarrow \mu \quad a.s. \tag{24}$$

其中，$\Rightarrow$ 指弱收敛，μ 如下给出：

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(\lambda_+ - x)(x - \lambda_-)}1_{\lambda_- \leq x \leq \lambda_+} \tag{25}$$

并且

$$\lambda_+ = (1+\sqrt{\alpha})^2,\ \lambda_- = (1-\sqrt{\alpha})^2. \tag{26}$$

注 3.1. 如果 $\alpha = 1$，那么

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(4-x)x}1_{0\leq x\leq 4}. \tag{27}$$

可以验证这个是半圆律下 x^2 的密度。

我们这里只计算 $\frac{1}{p}\mathbb{E}tr((\frac{S_n}{p})^k)$ 的极限。

类似于 Wigner 矩阵情况，我们考虑 S_n^k 对应的组合计数。

$$\frac{1}{n^{k+1}}\mathbb{E}trS_n^k = \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \\ j_1,\dots,j_k}}\mathbb{E}X_n(i_1,j_1)X_n(i_2,j_1)\dots X_n(i_k,j_k)X_n(i_1,j_k) \tag{28}$$

其中 $i \in [1,2,...,n]$, $j \in [1,2,...,p]$. 我们可以把 $\{(i_1,j_1),(i_2,j_1),(i_2,j_2)...(i_k,j_k),(i_1,j_k)\}$ 对应到 $[1,2,...,n]\cup[1,2,...,p]$ 这个二部图上的随机游走，每个 (i,j) 对表示他那一步走的边。

由于 $X_n(i,j)$ 独立，所以上面和式只有每个元素出现两次以上的才会有贡献。我们只需要考虑每条边都走两次以上的随机游走。设 n_i 和 n_j 分别为 i 序列和 j 序列中不同的 i,j 个数，则由于不重复的边之多 $2k/2$ 条，则所有顶点个数 $n_i+n_j \leq k+1$。

如果顶点个数 $< k$，在给定哪些 i 和 j 是同样的之后（或者说随机游走的形状给定后），那么顶点的选择方式是 $O(n^k)$ 种，这种随机游走的形状又被 k 所控制，所以考虑到和式前面的 $\frac{1}{n^{k+1}}$，我们只需要考虑 $n_i+n_j = k+1$ 的随机游走，这时他是二部图上的树。

我们要计算这种序列的个数，同时需要注意 j 序列中点在 $[1,2,...,p]$ 中选择，约为 $[1,2,...,n]$ 的 α 倍，所以除掉 n^{k+1} 后，要对这样的序列附上 α^{n_j} 的权重。

我们可以写出他的递推关系。设 β_k 为长度为为 $2k$ 的带权序列的个数，即

$$\beta_k = \sum_{\text{type sequences of length 2k}}\alpha^{n_j}, \tag{29}$$

我们假设 $2j$ 为首次回到出发点的时候，那么前 $2j$ 这一段为中间不返回初始点每条边且经过两次的序列，后 $2k-2j$ 段为从 $[1,2...,n]$ 出发的每条边经过两次的序列。

前 $2j$ 步去掉第 1 和 $2j$ 步建立了到长为 $2j-2$ 这样序列的双射。我们记从 $[1,2,...,p]$ 出发长为 $2k$ 每条边经过两次这种带权序列和为 γ_k，则：

$$\beta_k = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{j-1}\beta_{k-j}. \tag{30}$$

类似地可以得到 γ_k 的递推关系。

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{k} \beta_{j-1}\gamma_{k-j}. \tag{31}$$

则对于 $k \geq 1$ 我们都有 $\gamma_k = \beta_k$，当 $k=0$ 时我们可以看成是只有初始点长度为 0 的序列，所以 $\gamma_0 = \alpha, \beta_0 = 1$. 从而可以写出 β_k 的递推关系：

$$\beta_k = (\alpha-1)\beta_{k-1} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{k-j}\beta_{j-1}. \tag{32}$$

计算这个递推关系即可。要验证这样得到的 β_k 确实有

$$\beta_k = \int x^k d\mu, \tag{33}$$

我们可以考虑 β_k 的生成函数 $\hat{\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$. 则其满足

$$\hat{\beta}(z) = 1 + z\hat{\beta}(z) + (\alpha-1)z\hat{\beta}(z). \tag{34}$$

考虑积分

$$\begin{aligned} s(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int x^k z^k d\mu(x) \\ &= \int \frac{1}{1-xz} d\mu(x). \end{aligned} \tag{35}$$

验证 $s(z)$ 和 $\hat{\beta}(z)$ 满足同样的关系即可。

References

[1] Adina Roxana Feier, Methods of Proof in Random Matrix Theory ，学士毕业论文 (2012).